Lösungsvorschläge
zu den Aufgaben der

Mathematik- Rallye

A

Station Marktplatz

Aufgabe 1:
Gegeben:
- Flächeninhalt des Marktplatzes: A = 6500 m^2
- 1/50 der Fläche wird für die Bühne benötigt
- Einwohner von Schwäbisch Gmünd mit Teilorten: 60.000

$\Rightarrow$ diese ungefähre Zahl können die Schülerinnen und Schüler entweder dem Unterricht (Klasse 5/ 6) wissen, da man sich in EWG mit seiner Stadt befasst, anhand von Allgemeinbildung, wenn ein Schüler aus Schwäbisch Gmünd oder einem Teilort kommt oder durch Fragen von Personen, die gerade auf dem Marktplatz sind.

Gesucht:
- Anteil in p% der Gesamtbevölkerung G = 60.000, die auf dem Marktplatz bei einem Konzert Platz haben

Rechnung:
- Berechnung der Fläche des Marktplatzes ohne Bühne:

  $6500\ m^2 \cdot \frac{1}{50} = 130\ m^{2\ \ 2}$, 6500 m² - 130 m² = 6370 m².
- Berechnung der Anzahl der Menschen, die auf einer Fläche von 6370 m^2 bei einem Konzert Platz haben
  - Personenzahl auf 1 m^2: angenommen: 2 Personen, also 6370 m^2 für **12740 Personen**
- Berechnung des prozentualen Anteils an Einwohnern von der Gesamtbevölkerung, welche auf dem Marktplatz Platz haben

Gegeben: G = 60 000; P = 12740
Gesucht: p %

$\frac{p}{100} = \frac{P}{G} \Big| \cdot 100$ p = $\frac{12740}{60000} \cdot 100$ **p = 21,2%**

Aufgabe 2
geg.: - Gesamtbevölkerung von Schwäbisch Gmünd: 60 000
- Personenzahl, die auf 1 m^2 Platz hat: 2 Personen

ges.: - Fläche A für die Gesamtbevölkerung
2 Personen für 1m^2, also 60 000 Personen für **30 000m^2**

Station Marienbrunnen

Bezeichnung der Körper, die für das Volumen wichtig sind: regelmäßiges achtseitiges Prisma, Zylinder

<u>gegeben:</u>
Diagonale d der Grundfläche des regelmäßigen achtseitigen Prisma: d = 6,00m und Radius r des Zylinders: r = 20,00cm

<u>Zu messen</u>:
- Seite a der Grundfläche des regelmäßigen achtseitigen Prisma: a = 2,30m
- Höhe h_1 des regelmäßigen achtseitigen Prisma: h_1 = 1,75m
- Höhe h_2 des Zylinders: h_2 = 1,75m

Wichtig bei der Höhe:
1. Der Zylinder ist zwar höher als das Prisma; es genügt aber für die Rechnung die Höhe h_1 des Prismas zu übernehmen → $h_2 = h_1 = h$
2. Gemäß der Aufgabenstellung darf das Wasser im Brunnen nicht gleich überlaufen, wenn ein Schüler hineingeworfen wird.
   Beim Messen muss daher ca. 10 cm unterhalb des oberen Randes des Prismas der Wert für die Tiefe genommen werden.

<u>Gesucht:</u> Volumen des zusammengesetzten Körpers: $V_{ges} = ?$

- <u>Bestimmung des Gesamtvolumen:</u>

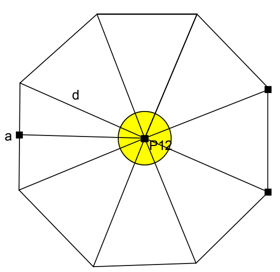
$V_{ges} = V_{Prisma} - V_{Zylinder}$

$V_{ges} = G_{Prisma} \cdot h - G_{Zylinder} \cdot h$

- Bestimmung des Volumen des regelmäßigen achtseitigen Prismas:

$V_{Prisma} = G \cdot h$

Berechnung der Grundfläche des regelmäßigen achtseitigen Prismas:

	$G_{Prisma} = 8 \cdot A_{Dreieck}$ $G_{Prisma} = 8 \cdot \frac{a \cdot s}{2}$ (Bestimmen von s über Pythagoras) $G_{Prisma} = 8 \cdot \frac{2{,}30m \cdot 2{,}77m}{2}$ $G_{Prisma} = 25{,}48\ m^2$
$V_{Prisma} = 25{,}48\ m^2 \cdot 1{,}75m$ $V_{Prisma} = 44{,}59\ m^3$ <u>Bestimmung des Zylindervolumen:</u> $V_{Zylinder} = G \cdot h$ $V_{Zylinder} = 0{,}126\ m^2 \cdot 1{,}75m$ $V_{Zylinder} = 0{,}22\ m^3$	Berechnung der Grundfläche des Zylinders mit dem Radius der Grundfläche r: $G = \pi \cdot r^2$ $G = \pi \cdot 0{,}20m^2$ $G = 0{,}126m^2$
Volumen gesamt: $V_{ges} = 44{,}27\ m^3 = 44270\ dm^3 =$ <u>44270 l</u> ➪ Der Marienbrunnen fasst ein Volumen von **44270 Liter**.	

Station Marktplatz – Kriegerdenkmal

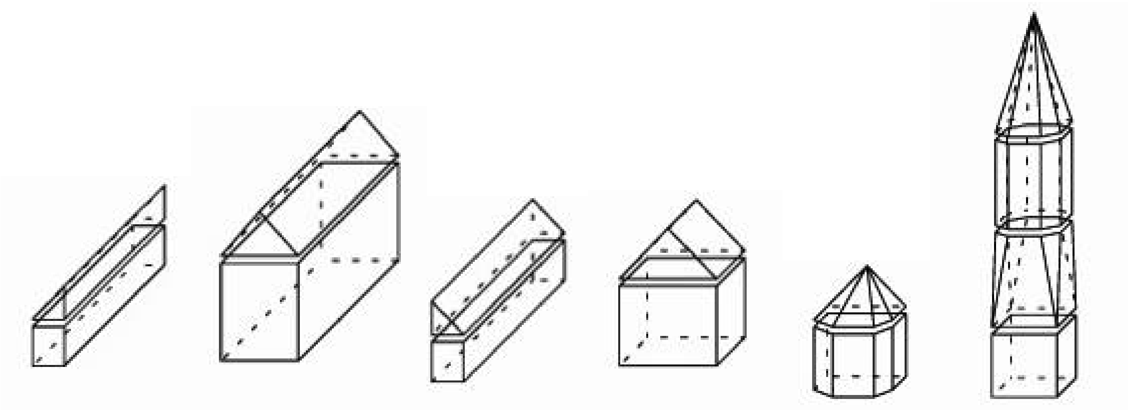
Eine Lösung gelingt zum Beispiel über den Strahlensatz und mit Hilfe des Tangens. Die Säule steht an Punkt A. In einiger Entfernung von der Säule wird ein Stab mit einer bekannten Länge senkrecht auf den Boden gestellt (Punkt B). Man sucht nun den Punkt C, von welchem man die Säulenspitze über die Stabspitze anpeilen kann. Die gesuchte Säulenhöhe verhält sich zur Stabhöhe wie AC zu BC. AC und BC lassen sich im Gelände messen, ebenso die Stabhöhe, so dass die Säulenhöhe daraus berechnet werden kann. Nutzt man den Lösungsweg über den Tangens (Gegenkathete zu Ankathete im rechtwinkligen Dreieck) sind der Abstand der Schülerinnen und Schüler zur Säule (AC = Ankathete) zu bestimmen und zusätzlich der Peilwinkel. Die Höhe der Säule ergibt sich über der Gegenkathete, die sich dann leicht ausrechnen lässt. Ggf. muss die Augenhöhe des messenden Schülers addiert werden.

Eine andere Lösungsmöglichkeit, die bereits Siebtklässlerinnen nutzen können, besteht darin, ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden. Punkt A bildet die Spitze mit einem 90°- Winkel, so dass die Basiswinkel sich je zu 45° ergeben. Wenn dieser Peilwinkel erreicht ist, entspricht der Abstand des messenden Schülers zu A der Höhe der Säule. Die Stadt gibt die Höhe der Säule mit Engel mit 10m an. Der Engel steht somit ungefähr in einer Höhe von **8,50m**.

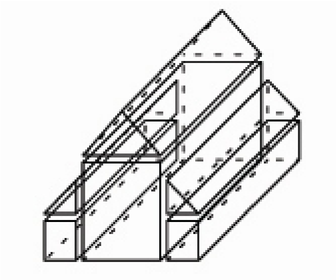
B

Station Johanniskirche

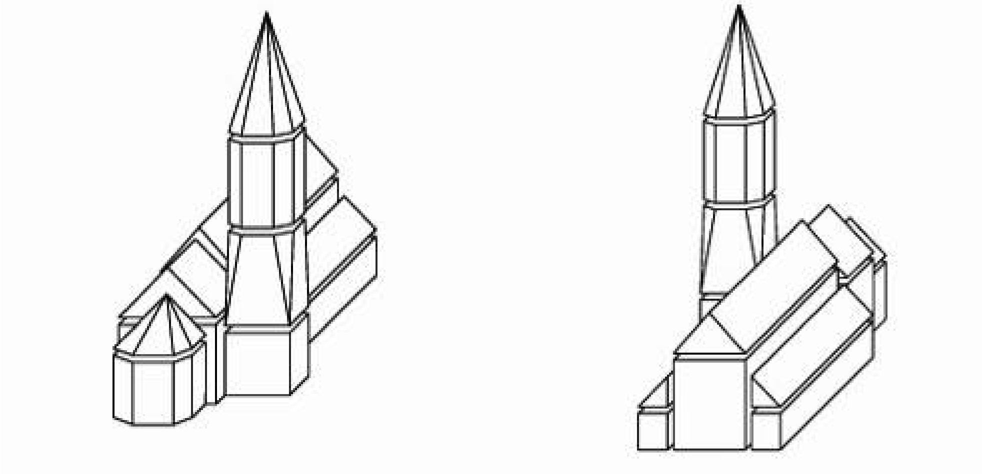
Beispiellösungen:
Die Schrägbilder sind wie folgt dargestellt (Ostansicht):
Linkes Seitenschiff – Haupt-/Mittelschiff – rechtes Seitenschiff – Altarbereich – „Erker an Altarbereich" – Turm.



Kombination von Seitenschiffe und Mittelschiff:



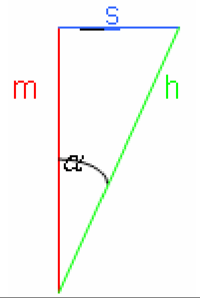
Die ganze Johanniskirche (Ost- und Westansicht):



(Abbildungen: Sören Pürckhauer)

Station Glockenturm der St. Johanniskirche

- Anfertigung einer Skizze mit Zuordnung der Größen zu den Strecken:

	Benennung: Mittelachse m Schrägstellung s: 93,5 cm Höhe des Glockenturms h: 48,0 m Zu zeigen: Neigungswinkel α = 1,1°

- Umwandlung der Längeneinheit:

entweder:
- Angabe beider Größen in cm: h = 4800,0 cm; s = 93,5 cm

oder:
- Angabe beider Größen in m: h = 48,0 m; s = 0,935 m

→ bei dieser Musterlösung wird mit der Längeneinheit cm weitergerechnet!

- Bestimmung der Winkelfunktion:

gegeben: - s: Länge der Gegenkathete = 93,5 cm
- h: Länge der Hypotenuse = 4800,0 cm

gesucht: - Winkel α, also: **sin** $\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{s}{h}$

<u>Berechnung des Neigungswinkels:</u>

$\sin\alpha = \frac{93{,}5cm}{4800{,}0cm}$ $\sin\alpha = 0{,}019479...$ $\alpha = 1{,}1161...° \approx 1{,}1°$ → wahre Aussage

Station Heilig-Kreuz-Münster (1)

<u>Aufgabe 1</u>

Lage des gotischen Fensters in der Kirche:
- es gibt mehrere kongruente Fenster wie das hier abgebildete gotische Fenster in dem Heilig-Kreuz Münster; sie befinden sich in der Nähe des Altars

<u>Aufgabe 2</u>

Da es bei dieser Aufgabe viele verschiedene Möglichkeiten gibt, den goldenen Schnitt anzuwenden, werden nur wenige ausgewählte Teilverhältnisse beschrieben.

- große Kreisbögen im Teilverhältnis zu kleinen Kreisbögen
- Seitenverhältnisse des Rechtecks
- Große Halbkreise zu kleineren Halbkreisen

Wichtig: an diesem gotischen Fenster kommt nicht immer genau das Teilverhältnis des goldenen Schnitts heraus, sondern gewisse Abweichungen auf Grund Abmessungsungenauigkeiten.

Station Löwenbrunnen

Zu a)
Um das Volumen des Brunnens zu berechnen, wird der Brunnen (gedanklich) in sechs Prismen mit gleichschenkligen Dreiecken als Grundfläche zerlegt.
Die folgenden Maße werden gemessen:
Grundseite der Grundfläche ≈ 2,00m
Höhe der Grundfläche ≈ 2,40m
Höhe des Prismas ≈ 1,60m

Es folgt für das Volumen des Prismas: ½ · 2,00m · 2,40m · 1,60m = 3,84m³

Da 1m³ = 1.000 dm³ und 1dm³ = 1l befinden sich ungefähr 3.840l in einem Prisma und 3.840l · 6 = **23.040l** im gesamten Brunnen.

Zu b)
Mithilfe eines Messbechers und einer Stoppuhr lässt sich ermitteln, wie lange es dauert, bis aus einem Wasserzulauf ein Liter geflossen ist. Dies ist etwa nach 8 Sekunden der Fall.
Wäre nur ein Wasserzulauf vorhanden, würde es somit 23.040l · 8s/l = 184.320s dauern, bis der jetzige Wasserstand erreicht wäre.
Da es jedoch vier Zuläufe sind, verkürzt sich die Dauer auf 184.320s / 4 = 46.080s = 768min = **12h 48min**

Zu c)
Der Wasserstand beträgt nach 768min etwa 160cm. Die Geschwindigkeit, in der sich der Brunnen füllt, beträgt somit:
160cm : 768min ≈ 0,21cm/min

Es handelt sich um eine proportionale Zuordnung.

Zu d)
Der Wasserstand beträgt nach **5 Stunden etwa 60cm**. Die genaue Berechnung ergibt einen Wert von 300min · 0,21cm/min = 63cm.

Station Rosengarten

Lösungsweg(e):

Der gesamte Park hat die Form eines Quadrates, so dass der Flächeninhalt einfach zu berechnen ist. Die bepflanzten Flächen sind alle gleich groß. Ihren Flächeninhalt erhält man durch Subtraktion der Flächeninhalte der Wege vom ganzen Parkinhalt. Die bepflanzten Flächen entsprechen jeweils etwa einem Trapez. Ihr Flächeninhalt ergibt sich daher aus $A = h \cdot (a+c)/2$, wobei a und h feste Linien in der bepflanzten Fläche sind. Um c zu bestimmen, müssen die Schülerinnen und Schüler ein bisschen Fantasie aufbringen. Die bepflanzte Fläche entspricht dann 4A.

Um den Anteil der grünen Fläche am Park zu berechnen, muss man nur die grüne durch die gesamte Fläche teilen.

C

Station Fünfknopfturm

Lösungsvorschlag

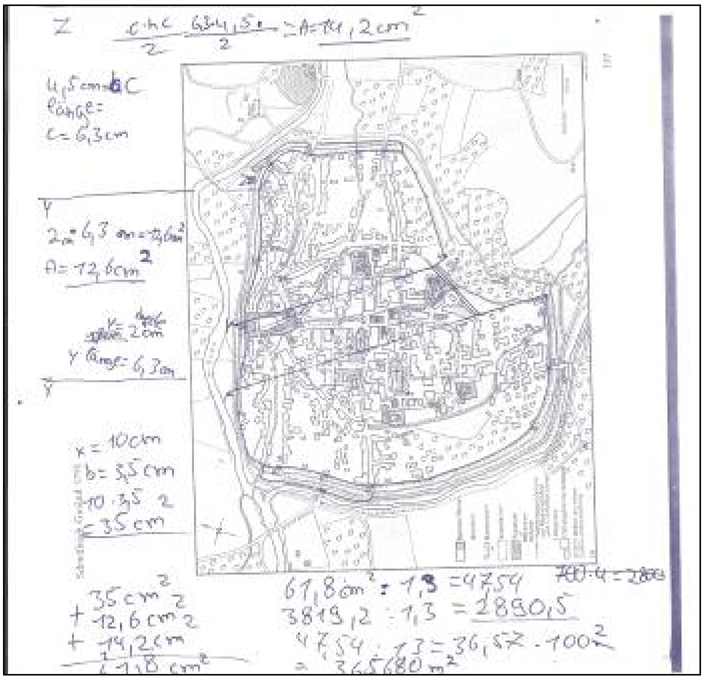
Eine Lösungsmöglichkeit ist das Auslegen der Fläche mit leicht zu berechnenden Flächen, wie z.B. Quadraten oder Rechtecken, aber auch eine Annäherung der Fläche an ein großes Rechteck mit kleineren einfachen Restflächen wie Dreiecken o.ä. usw.

Die von der Stadtmauer umschlossene Fläche betrug **440.000 m²**, also **44 ha**. Je nach Genauigkeit der Abmessungen ergeben sich Werte zwischen 35,2 und 52,8 ha.

Die Länge der Stadtmauer betrug etwas **mehr als 3 km**.

Ein Lösungsvorschlag von Schülerinnen und Schülern aus der Erprobung:

Sie unterteilten die Fläche in zwei Trapeze und ein Rechteck und addierten deren Flächeninhalte zusammen. Mit einem Gesamtflächeninhalt von 365.680 m^2 wich das Ergebnis zwar um ca. 7,5 ha vom tatsächlichen Wert ab (auf Grund der groben Einteilung); die Schülerinnen und Schüler erfassten aber mit der Lösung die wesentliche Strategie der Aufgabe.



Station Schmiedturm

Die für den Flächeninhalt nötigen Werte sind:

Breite des Turmes	ca. 4,20m	durch Messen
Länge des Turmes	ca. 5,60m	durch Messen
Höhe des Turmes mit Dach	32,00m	entnommene Information von einer Schrifttafel
Höhe des Turms ohne Dach	ca. 23 m	durch Messen (maßstabsgetreus Dreieck) oder durch Messen von Teilstrecken und Extrapolation bzw. durch Schätzen zum Beispiel auf Grund der Größe einzelner Schülerinnen und Schüler
Höhe des Dachs	ca. 9 cm	als Differenz
Höhe der Dachdreiecke	10,00m	geschätzt aus der Höhe des Dachs

Der Flächeninhalt setzt sich aus 2 · 2 Dachdreiecken und 2 · 2 Wandrechtecken wie folgt zusammen:

$2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 4{,}20\text{m} \cdot 10\text{m}) + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 5{,}60\text{m} \cdot 10\text{m}) + 2 \cdot (4{,}20\text{m} \cdot 23\text{m}) + 2 \cdot (5{,}60\text{m} \cdot 23\text{m})$
$= 2 \cdot 21\text{m}^2 + 2 \cdot 28\text{m}^2 + 2 \cdot 96{,}60\text{m}^2 + 2 \cdot 128{,}80\text{m}^2$
$= 42\text{m}^2 + 56\text{m}^2 + 193{,}20\text{m}^2 + 257{,}60\text{m}^2$
$= 548{,}80\text{m}^2$

Das Künstlerehepaar Christo benötigt somit <u>mindestens</u> **548,80m² Stoff**.

Station Kreisverkehr

<u>Aufgabe 1</u>
Umwelt:

☺ - weniger Ausstoß von Abgasen, da keine langen Wartezeiten wie bei Ampel, - kostengünstiger als Ampelanlagen

Verkehr:

Vorfahrtsregeln: ☹ - Unsicherheiten bei den Verkehrsteilnehmern
Verkehrsfluss: ☺ - weniger Staubildung wegen durchgängigem Verkehr

Sicherheit:

☺ - Risiko der Verkehrsunfälle sinkt, da Geschwindigkeit gedrosselt wird
☹ - Überqueren von größeren Kreisen für Fußgänger gefährlich

Aufgabe 2

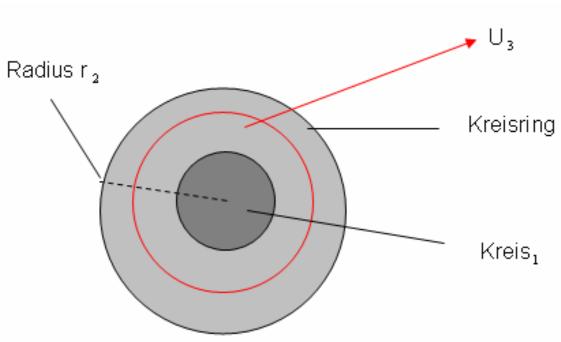
Schätzen durch Abzählen der Autos im Kreisverkehr, Durchschnitt: ca. 3 Autos
Rechnerisch**:**
Überlegung: Einflussfaktoren, welche die Anzahl an Autos, die gleichzeitig in einem Kreisverkehr fahren, beeinflussen sind Sicherheitsabstand, durchschnittliche Länge eines Pkw's, durchschnittliche Breite eines Pkw`s, Länge der Fahrbahnfläche.

Schätzen und näherungsweises Berechnen:

- Sicherheitsabstand: ca. 3,00 m
- Durchschnittliche Länge eines Pkw's: ca. 5,00 m
- Durchschnittliche Breite eines Pkw`s: 2,50 m
- Länge der Fahrbahnfläche: Da ein Pkw fast so breit ist wie der Radius des Kreisringes, kann der mittlere Umfang des Kreisrings als Fahrbahnlänge angenommen werden.

Berechnung des mittleren Umfangs des Kreisrings:

Geg.: $A_{Kreis1} = 21{,}24\ m^2$; $r_2 = 8{,}00$ m
Ges: U_3



Berechnung des Radius r_1:
$A_{Kreis1} = \pi \cdot r_1^2 \quad \rightarrow r_1 = 2{,}60m$
Berechnung der Breite des Kreisrings:
$b = r_2 - r_1$, $b = 8{,}00m - 2{,}60m \rightarrow b = 5{,}40m$
Berechnung des Radius r_3: $r_3 = \frac{b}{2}$, $r_3 = \frac{5{,}40m}{2} \rightarrow r_3 = 2{,}70m$, Berechnung von Umfang U_3: $U_3 = 2 \cdot \pi \cdot r_3$
$U_3 = 16{,}96$ m $\approx 17{,}00$ m (da alle Werte durchschnittlich sind)

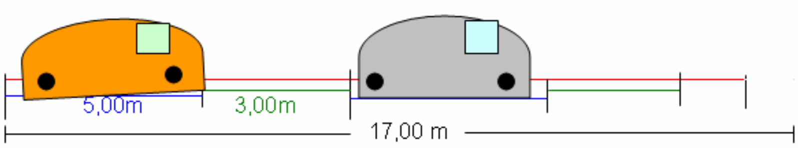
Überlegung 1: benötigte Strecke für 1 Pkw

Länge Pkw:	5,00 m
Sicherheitsabstand:	+ 3,00 m
Benötigte Strecke pro Pkw:	8,00 m

Überlegung 2: freie Strecke für weitere Pkw's

Länge der Gesamtstrecke im Kreisverkehr:	17,00 m
Strecke für 1 Pkw:	- 8,00 m
Freie Strecke für weitere Pkw's:	9,00 m

→ dieser Platz reicht noch für 1 weiteres Auto
→ es können durchschnittlich **2 Autos gleichzeitig** im Kreisverkehr fahren, wenn sie ungefähr die selbe Geschwindigkeit haben
Skizze:



Station Bahnhof

Zu a) Das Ergebnis hängt von dem Zeitpunkt ab, zu dem sich die Schülerinnen und Schüler am Bahnhof befinden. Angenommen dies wäre um 11.02 Uhr. Der nächste Zug würde dann in 18 Minuten um 11.20 Uhr fahren.

Zu b) Innerhalb einer Minute überstreicht der Minutenzeiger einen Winkel von:
360° / 60 = 6º. In 18 Minuten wären dies folglich 18 · 6º = 108º

Zu c) Man nennt diese Art von Winkel stumpfer Winkel, 90º < 108º < 180º.

Zu d) Einen Winkel von 180º nennt man gestreckten Winkel. Überläuft der Minutenzeiger in diesem Fall solch einen Winkel, wäre es 11.32 Uhr.

Zu e) Eine Fahrt nach Aalen dauert etwa 20 Minuten. Dies wäre ein Drittel einer Stunde.

Zu f) Eine Fahrt nach Oberkochen dauert mit Umstieg etwa 35 Minuten. Dies wären 7/12 einer Stunde.

Station Karl-Olga-Brücke

Zu a) Innerhalb von 5 Minuten werden beispielsweise 38 Autos, 6 Lastkraftwagen und 14 Personen gezählt. Daraus ergibt sich die folgende Tabelle:

Autos	LKWs	Fußgänger
38	6	14

Zu b) Um zu ermitteln, wie viele Fahrzeuge und Personen die Brücke voraussichtlich in einer Stunde überqueren werden, müssen die Werte mit zwölf multipliziert werden, ergibt 456 Autos, 72 LKWs, 168 Fußgänger, insgesamt 696.

Zu c) Als Bruch: Autos: $\frac{456}{696} = \frac{57}{87}$, LKWs: $\frac{72}{696} = \frac{3}{29}$, Fußgänger: $\frac{72}{696} = \frac{7}{29}$
In Prozent: Autos ≈ **66 %**, LKWs ≈ **10 %**, Fußgänger ≈ **24 %**

Das Ergebnis hängt von der eigenen Messung ab!

Station Fußgängerbrücke

Da die Brücke ca. 20 m lang und 2,50 m breit ist, hat sie eine Grundfläche von 50 m². Nimmt man an, dass pro 1 m² drei Menschen passen (dies kann man konkret ausprobieren), hätte die Brücke Platz für **150 Menschen**. Bei einem Durchschnittsgewicht von 50 kg (unter Berücksichtigung von Kindern) wären das 7,5 t. Die Brücke mit einer Höchstlast von **5t würde also nicht ausreichen.** Sie könnte höchstens 100 Menschen mit einem Durchschnittsgewicht von 50 kg oder (5000:70=) **71 Menschen mit einem Durchschnittsgewicht von 70 kg tragen**.

Das Ergebnis hängt von dem angenommenen Durchschnittsgewicht ab (ggf. 70 kg wählen).

Station Spielplatz

Beispielsweise lässt sich die Oberfläche des zusammengesetzten Körpers berechenen. In der Erprobung mit einer Klasse kamen die Schülerinnen und Schüler auf die Idee, dass sich diese ergibt als Summe aus Oberfläche einer Pyramide und Mantel eines Quaders abzüglich der Grundfläche eines Quadrats (dort treffen Pyramide und Quader aufeinander). Diese Überlegung ist richtig, da die Grundseite der Pyramide größer ist als die Grundseite (Quadrat) des Quaders
(berechnete Oberfläche = **19,8 m²**).

Station Schachbrett

Zu a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}, \frac{16}{32}, \frac{32}{64}$ …., aber auch $\frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}$,...
Zu b) Es befinden sich dann noch acht Spielfiguren auf dem Feld. Ferner sind $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$ des gesamten Schachfeldes besetzt. Dies sind12,5 Prozent.
Zu c)

Anteil des besetzten Feldes	Anzahl der Spielfiguren
$\frac{3}{8}$	24
$\frac{5}{16}$	20
$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	32

Zu d) Ein Kästchen des kleinen Spielfeldes ist 5cm lang. Die Länge eines Kästchens des großen Spielfelds beträgt 40cm. Somit ergibt sich ein Verhältnis von 5cm:40cm = 1:8 $\rightarrow$ Maßstab 1 : 8.
Zu e) Ein Bauer des großen Spielfeldes ist etwa 40cm groß; ein Bauer des kleinen Feldes ist damit 5 cm groß.

Station Stadtgarten - Kongresszentrum

Auge und Ohr sind auszumessen und dem Maßstab entsprechend mit den Maßen eines Menschen zu vergleichen. Die Größe des zugehörigen Menschen ergibt sich über das Verhältnis zwischen Ohr und Gesamtgröße.

Mögliche Messwerte:
Kunstwerke:
Auge: 36 cm Höhe, 73 cm Breite
Ohr: 150 cm Länge, 117 cm Breite.
Mensch:
Auge: 1,2 cm Höhe, 3 cm Breite
Ohr: 6,5 cm Länge; 3,5 cm Breite.

Lösungsskizze: Ein Vergleich von Mensch und Kunstwerk ergibt, dass das Kunstwerk-Ohr etwa 23mal so lang ist wie das menschliche Ohr; der zugehörige Mensch also etwa 40 m groß wäre.
Auge und Ohr stammen eher nicht vom gleichen Menschen, da das Kunstwerk-Auge etwa 30mal so hoch ist wie das menschliche Auge.

Alternativ wäre auch folgender Ansatz denkbar: Die Länge eines Ohres passt etwa 3,5 mal in die Kopflänge; die Kopflänge entspricht etwa ein Siebtel der Körpergröße. Zu einem 150 cm langem Ohr gehört demnach ein rund $150 \cdot 3{,}5 \cdot 7 \approx 37$ m großer Mensch. In einer noch differenzierteren Betrachtung können natürlich auch die Quotienten Länge/Breite usw. verglichen und in Beziehung gesetzt werden.